8.4.2 Limity některých posloupností

Předpoklady: 080401

Pedagogická poznámka: Tuto a tři následující hodiny je možné probrat za dvě vyučovací hodiny. V této hodině je možné vynechat dokazování limit v příkladu 3.

Opakování z minulé hodiny:

Hodnoty posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ se pro n blížící se k nekonečnu blíží k 2 a to tak, že mezi posloupností a číslem 2 „neexistuje žádná mezera“ $\Rightarrow$ říkáme, že číslo 2 je limitou posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n}+2\right)_{n=1}^{\infty}$ pro n blížící se k nekonečnu (píšeme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{2^n}+2\right)=2$).

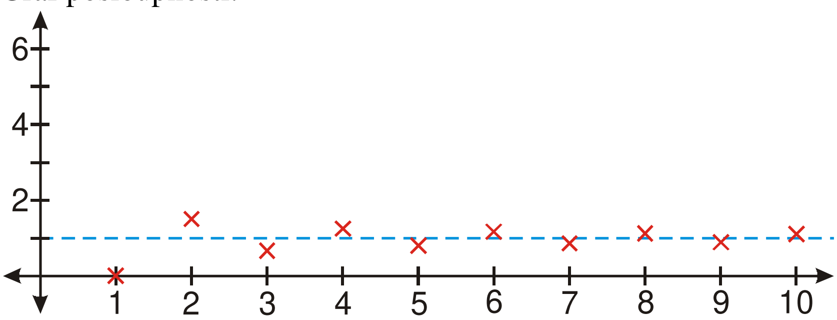
Exaktní zachycení předchozího odstavce obsahuje definice limity.

> Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslu a říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nyní si rozebereme posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n}+1\right)_{n=1}^{\infty}$.

Prvních deset členů posloupnosti: $0;1\frac{1}{2};\frac{2}{3};1\frac{1}{4};\frac{4}{5};1\frac{1}{6};\frac{6}{7};1\frac{1}{8}$.

Graf posloupnosti:



Vypadá to, že limitou této posloupnosti je číslo 1. Hodnoty se k němu blíží z obou stran.

Zkusíme vlastnost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{[-1]^n}{n}+1\right)=1$ dokázat z definice v modrém rámečku.

Zvolíme $\varepsilon = 0{,}1$. Hledáme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dosadíme: $\left|\frac{[-1]^n}{n}+1-1\right| < 0{,}1$.

$\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| < 0{,}1$ Platí (pro $n \in N$): $\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$.

$\frac{1}{n} < 0{,}1$

$10 < n \Rightarrow$ pro a_{11} a všechna a_n za ním platí: $|a_n - 1| < 0{,}1$.

Zkusíme to obecně pro $\varepsilon > 0$.

$\left| \frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{[-1]^n}{n} \right| < \varepsilon$ Platí (pro $n \in N$): $\left| \frac{[-1]^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$.

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

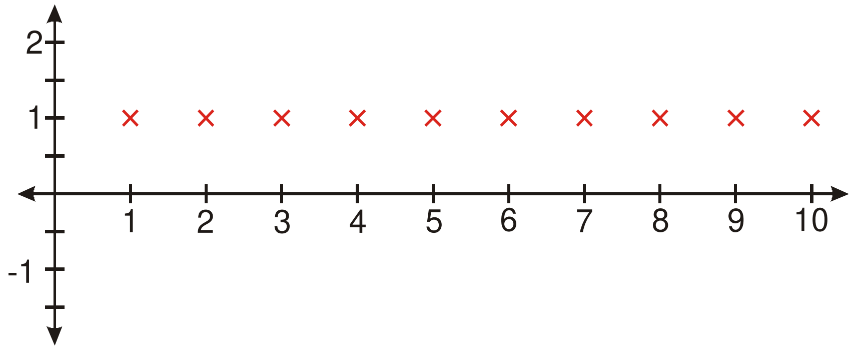
$\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow$ protože $\varepsilon > 0$, určitě takové a_n najdeme $\Rightarrow$ posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1 \right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu 1.

Př. 1: Pro zadané posloupnosti napiš prvních deset členů, načrtni jejich graf a odhadni, zda mají limitu.

a) $(1)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left([-1]^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $(1)_{n=1}^{\infty}$

$1;1;1;1;1;1;1;1;1;1$

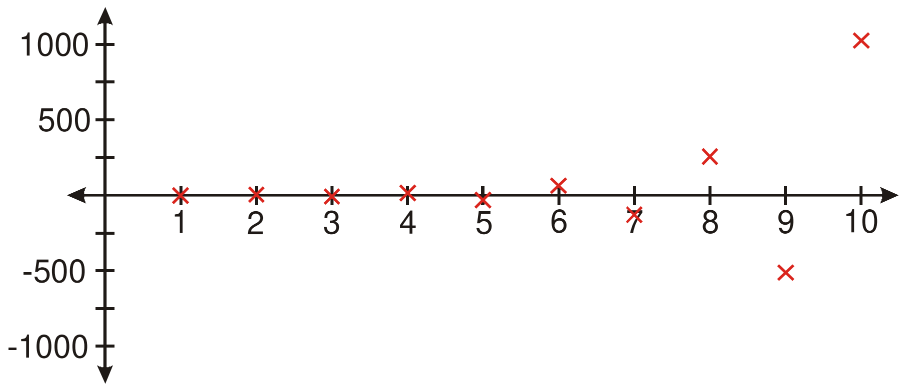


Na první pohled se zdá, že posloupnost se „k ničemu neblíží“ a neměla by tedy mít limitu. Pokud však použijme přímo definici limity, je zřejmé, že posloupnost má limitu rovnou jedné, protože pro libovolně široký pás kolem 1 jsou všechny členy posloupnosti ihned uvnitř a splňují tak podmínku pro existenci limity.

$\Rightarrow$ Zřejmě platí: $\lim_{n \to \infty} (1) = 1$.

b) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$

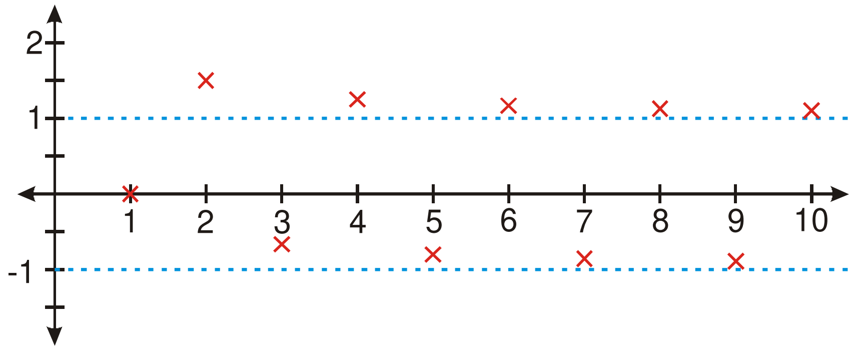
$-2;4;-8;16;-32;64;-128;256;-512;1024$



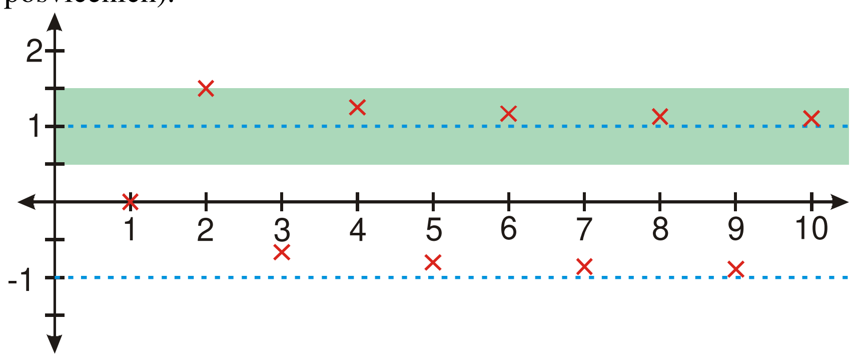
Jak z hodnot tak z grafu je zřejmé, že posloupnost nemá žádnou limitu.

c) $\left([-1]^n + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$0; \frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; -\frac{4}{5}; \frac{7}{6}; -\frac{6}{7}; \frac{9}{8}; -\frac{8}{9}; \frac{11}{10}$

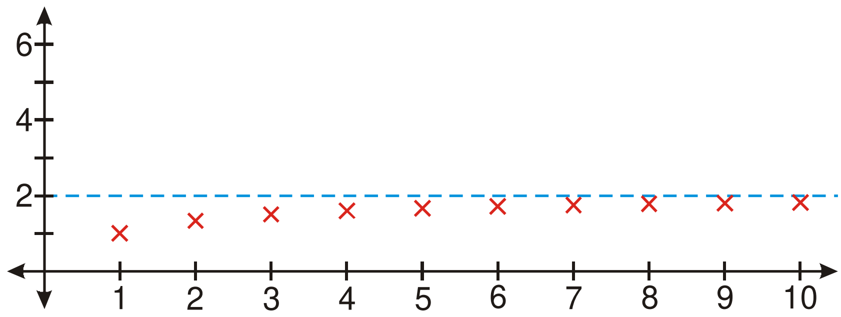


Z grafu se zdá, že posloupnost má dvě limity 1 a –1, ale pozor!!! Kdyby posloupnost měla limitu 1, musel by například pro pás o poloměru 0,5 existovat člen a_n takový, že všechny členy posloupnosti za ním by byly uvnitř pásu, ale to se kvůli tomu, že polovina členů posloupnosti se snaží přiblížit k –1, nestane, protože tyto členy se do pásu nedostanou. $\Rightarrow$ Posloupnost nemá žádnou limitu (u limit posloupností nejde sedět jedním zadkem na dvou posvíceních).



d) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$1; \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \frac{12}{7}; \frac{7}{4}; \frac{16}{9}; \frac{9}{5}; \frac{20}{11}$



Z grafu se zdá, že posloupnost má limitu 2.

Z úvahy: výraz $\frac{2n}{n+1}$, se blíží výrazu $\frac{2n}{n}=2$.

$\Rightarrow$ Zřejmě platí $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$.

Pedagogická poznámka: Není možné čekat, až budou mít všichni bod d). Stačí, když se jim podaří dokončit bod c).

Předchozí příklady dobře dokumentují dvě další věty o limitách posloupností.

- **Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.**
- **Každá konvergentní posloupnost je omezená.**

Př. 2: Najdi v předchozím příkladu bod, který dokumentuje každou z předchozích dvou vět, a zkus najít hlavní myšlenku důkazů obou vět.

a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
Větu dokumentuje bod c), ačkoliv se z grafu zdá, že posloupnost má dvě limity, je v příkladu zdůvodněno, proč posloupnost nemá ani jedinou (například do pásu o poloměru 0,5 se nevejde polovina členů posloupnosti, které se snaží přiblížit hodnotě –1). $\Rightarrow$
Myšlenka důkazu: Kdyby posloupnost měla dvě různé limity, stačilo by kolem jedné z nich udělat pás, který má menší poloměr než je vzdálenost těchto limit, a členy, které se blíží k druhé limitě, budou mimo něj.

b) Každá konvergentní posloupnost je omezená.
S větou souvisí bod b), kde máme neomezenou posloupnost a je ihned vidět, že nemůže mít limitu. $\Rightarrow$
Myšlenka důkazu: Posloupnost je neomezená, právě když se pro n blížící se nekonečnu blíží členy posloupnosti také nekonečnu (nebo mínus nekonečnu = roste nebo klesá nade všechny meze), pak se ale nemohou blížit k nějakému konkrétnímu číslu (limitě).

Př. 3: Odhadni limity následujících posloupností a poté jejich existenci dokaž použitím definice limity.

a) $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}, |q|<1$ b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(3\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}, |q|<1$

Odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$|q^n - 0| < \varepsilon$

$|q^n| < \varepsilon$ zlogaritmujeme, $\log x$ je rostoucí funkce $\Rightarrow$ neobracíme nerovnost.

$\log|q^n| < \log\varepsilon$

$n\log|q| < \log\varepsilon \quad / : \log|q|$ $\quad |q| < 1 \Rightarrow \log|q| < 0 \Rightarrow$ obracíme znaménko nerovnosti.

$n > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}$ $\Rightarrow$ pro každé ε dokážeme dopočítat n $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí:

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0; \quad |q| < 1$.

Jak by to vypadalo, kdyby neplatilo $|q| < 1$?

$|q| > 1 \Rightarrow \log|q| > 0 \Rightarrow$ neobracíme znaménko nerovnosti.

$n < \dfrac{\log\varepsilon}{\log|q|}$ $\Rightarrow$ přesně opačný výsledek než potřebujeme, od určitého n budou všechny členy posloupnosti mimo vyznačený pás o šířce ε $\Rightarrow$ pro $|q| > 1$ posloupnost není konvergentní.

b) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ $\quad n$ je přirozené číslo $\Rightarrow$ platí $\left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$.

$\dfrac{1}{n} < \varepsilon \quad / \cdot \dfrac{n}{\varepsilon}$

$\dfrac{1}{\varepsilon} < n$ $\Rightarrow$ máme určené n pro každé ε $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

c) $(3)_{n=1}^{\infty}$

Odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$|3 - 3| < \varepsilon$

$|0| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ Pro libovolné ε je podmínka splněna ihned $\Rightarrow$ jako a_n můžeme brát a_1 a jako n jedničku $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí: $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$.

d) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Odhadujeme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

Chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon>0$ najdeme takové n_0, aby platilo, že pro $n\geq n_0$, $|a_n-a|<\varepsilon$. Budeme odvozovat od konce.

$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon$ $\quad$ 2^n je vždy kladné číslo $\Rightarrow$ platí $\left|\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$.

$\frac{1}{2^n}<\varepsilon \quad /\cdot\frac{2^n}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon}<2^n$ $\quad$ zlogaritmujeme, $\log x$ je rostoucí funkce $\Rightarrow$ neobracíme nerovnost.

$\log\frac{1}{\varepsilon}<\log 2^n$

$\log\frac{1}{\varepsilon}<n\cdot\log 2 \quad /:\log 2$ $\quad$ $\log 2>0$ $\Rightarrow$ znaménko se nemění.

$\log\frac{1}{\varepsilon}<n\cdot\log 2 \quad /:\log 2$

$\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}<n$ $\quad$ $\Rightarrow$ Pro každé ε dokážeme dopočítat n $\Rightarrow$ podmínka je splněna $\Rightarrow$ platí:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

Pedagogická poznámka: Při kontrole je na místě zmínit, jak by situace vypadala, kdyby neplatilo $|q|<1$. Ani v jednom příkladu se žáci jinak nesetkají s tím, jak to vypadá, když posloupnost konvergentní není.

Poslední výsledek je jasný a důležitý zároveň. Zformulujeme si ho do věty a podle ní zformulujeme ještě jednu větu:

- **Geometrická posloupnost $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $|q|<1$ je konvergentní a její limita je 0.**
- **Geometrická posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q|<1$ je konvergentní a její limita je 0.**

Shrnutí: Dosazením do definice můžeme dokázat existenci limity.